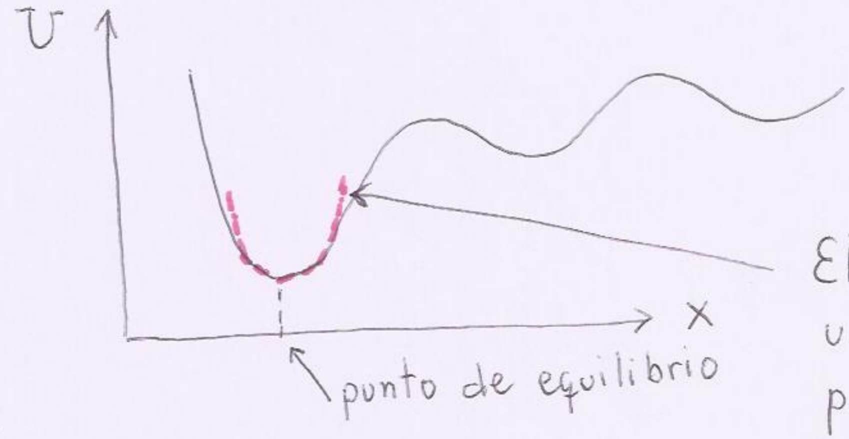
Oscilador armónico en 1-D



El potencial alrededor de un punto de equilibrio puede ser aproximado a una parábola (curva punteada).

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (1)$$

k = constante de restitución

La ecuación de Schrödinger independiente de t se escribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\,\Phi(x) = E\,\Phi(x) \qquad (2)$$

Definición :

$$y = \left(\frac{\sqrt{km}}{\hbar}\right)^{1/2} x \qquad (3)$$

$$\alpha = \frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (4)$$

Recordar que en un movimiento armónico simple (MAS)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (5)$$

y además en general

$$\omega = 2\pi\nu \qquad (6)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \tfrac{1}{2}kx^2\right)\Phi(x) = 0 \qquad (7)$$

$$(3) \Rightarrow x = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}\right)^{1/2} y \qquad (8)$$

$$(8) \text{ en } (7) \Rightarrow \frac{\sqrt{km}}{\hbar}\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}k\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}y^2\right)\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(E - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\hbar y^2\right)\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left(\frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} - y^2\right)\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \left(\alpha - y^2\right)\Phi = 0 \qquad (9)$$

Para que Φ se comporte adecuadamente, esto es, cuando $y \to \infty$, $\Phi \to 0$, de modo que Φ sea normalizable, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 dx = 1$, debe cumplir que

$$\alpha = 2n + 1, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (10)$$

Esto se demuestra en el Apéndice H, pag. 801, Eisberg - Resnick (Nota: no es necesario ver esta demostración a menos que el estudiante esté interesado)

(4) y (10) $\Rightarrow$ $$\frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} = 2n+1$$

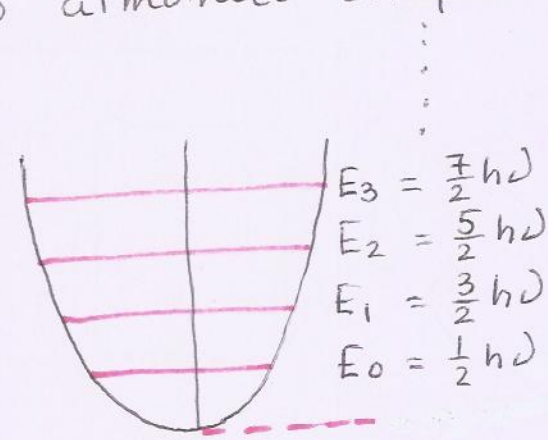
$$\Rightarrow \quad E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (11)$$

(6) y (11) $\Rightarrow$ $$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)h\nu \qquad (12)$$

Cuando $n = 0 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}h\nu$ (13)

✓ E_0 se denomina la energía del punto cero. La menor energía de un oscilador armónico no es cero. Es una cantidad distinta de cero aún cuando la temperatura del sistema tienda a cero.

✓ Los niveles de energía correspondientes a una energía potencial de tipo armónico simple están igualmente espaciados.



La obtención de las soluciones del oscilador armónico en 1-D no es matemáticamente trivial. Los interesados pueden verla en el apéndice H del Eisberg-Resnick.

La solución es:

$$\Phi_n(y) = \left(\frac{2m\nu}{\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y)\, e^{-y^2/2} \qquad (14),$$

donde $y = \left(\frac{\sqrt{km}}{\hbar}\right)^{1/2} x \qquad (15)$

y $H_n(y)$ = Polinomios de Hermite

n	$H_n(y)$	E_n
0	1	$1/2\, h\nu$
1	$2y$	$3/2\, h\nu$
2	$4y^2-2$	$5/2\, h\nu$
3	$8y^3-12y$	$7/2\, h\nu$
⋮	⋮	⋮

Es importante recalcar que la primera autofunción Φ_0 es una función par, la segunda Φ_1 es una función impar, y así sucesivamente se van alternando autofunciones pares e impares a medida que aumen[ta] la energía.

Leer Beiser, pags. 187-192.
Eisberg-Resnick, pags. 265-269.